Απειροστικός Λογισμός Ι, 6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Έστω $f, g : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ δυο συνεχείς συναρτήσεις ώστε $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.
α) Να δειχθεί ότι υπάρχει $\theta > 0$ ώστε $f(x) \geq g(x) + \theta$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.
β) Να δειχθεί ότι υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $f(x) > g(x) + \lambda$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

2. Έστω $f : [1, 5] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση ώστε $f(1) = f(5)$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν $x, y \in [1, 5]$ με $y - x = 2$ ώστε $f(x) = f(y)$.

3. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο συνεχείς συναρτήσεις. Ορίζουμε $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με ως εξής:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ \\ g(x), & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Για $\xi \in \mathbb{R}$ να δειχθεί ότι η h είναι συνεχής στο ξ αν και μόνο αν $f(\xi) = g(\xi)$.

4. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο συνεχείς συναρτήσεις ώστε $(f(x))^2 = (g(x))^2$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι είτε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5. Έστω $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν $x, y, z \in [a, \beta]$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, \beta]$ ώστε $f(\xi) = \frac{1}{3}(f(x) + f(y) + f(z))$.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι επί.

7. Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση f λαμβάνει ελάχιστη τιμή.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to R$ με $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια της f στο 0.

9. Αν για τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(a\beta) = f(a) + f(\beta)$ για κάθε $a, \beta > 0$, αποδείξτε ότι: (i) $f(1) = 0$. (ii) $f(\frac{1}{a}) = -f(a)$ για κάθε $a > 0$. (iii) $f(\frac{a}{\beta}) = f(a) - f(\beta)$ για κάθε $a, \beta > 0$ (iv) Αν η f είναι συνεχής στο σημείο 1 τότε είναι συνεχής παντού. (v) Αν η f είναι συνεχής σε ένα $\xi \in (0, +\infty)$ τότε είναι συνεχής στο σημείο 1 (και άρα σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα είναι συνεχής παντού).

10. Έστω $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ δύο συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες $f \circ g = g \circ f$ και η συνάρτηση f είναι αύξουσα. Να δειχθεί ότι οι f, g έχουν κοινό σταθερό σημείο, δηλαδή ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ ώστε $f(\xi) = \xi$ και $g(\xi) = \xi$. [Υπόδειξη: Βρίσκουμε πρώτα ένα σταθερό σημείο της g δηλαδή ένα $x_1 \in [0, 1]$ ώστε $g(x_1) = x_1$. Στη συνέχεια θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με πρώτο όρο x_1 και $x_{n+1} = f(x_n)$. Δείξτε ότι η ακολουθία αυτή είναι μονότονη και ότι κάθε όρος της είναι σταθερό σημείο της g. Αποδείξτε ότι το όριό της είναι κοινό σταθερό σημείο των f, g.]